## Лабораторна робота 7. Мінімізація логічної функції та її представлення в базисі І-НЕ

**Завдання:** мінімізувати та схемотехнічно реалізувати на елементах 2І–НЕ логічну функцію, задану формулою (1). Побудувати її таблицю істинності.

$$\begin{gathered} y = f\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + \\ + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + \\ + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 . \end{gathered} \tag{1}$$

Результат підтвердити написанням програми та збиранням схеми у Multisim.

**Приклад, аналогічний до запропонованого завдання**. Виконаємо таке завдання для функції, що задана формулою (2):

$$\begin{gathered} y = f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \\ + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 . \end{gathered} \tag{2}$$

На основі правил склеювання мінімізуємо функцію. Так як

$$\begin{gathered} \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 , \quad \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_2 \bar{x}_3 x_4 , \\ \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 , \; x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 = x_1 \bar{x}_2 x_3 , \end{gathered} \tag{3}$$

то з урахуванням (3) функція (2) перепишеться:

$$y = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \tag{4}$$

Так як

$$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 x_4 = x_2 \bar{x}_3 , \; \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_2 x_3 , \tag{5}$$

то на основі (3) та (4) матимемо

$$y = x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3 . \tag{6}$$

Логічна функція у вигляді (6) є мінімізованою. Як бачимо, функція не залежить від змінних $x_1$ та $x_4$. Якщо логічна функція залежить від $n$ змінних, то її таблиця істинності має містити $2^n$ можливих випадків. Згідно (6) функція залежить від двох змінних, тож треба перебрати 4 випадки. Побудуємо таблицю істинності:

| $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ та $x_4$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | будь-які | 0 |
| 0 | 1 | | 1 |
| 1 | 0 | | 1 |
| 1 | 1 | | 0 |

Схемотехнічна реалізація на елементах 2І–НЕ наведена на рис. 1:

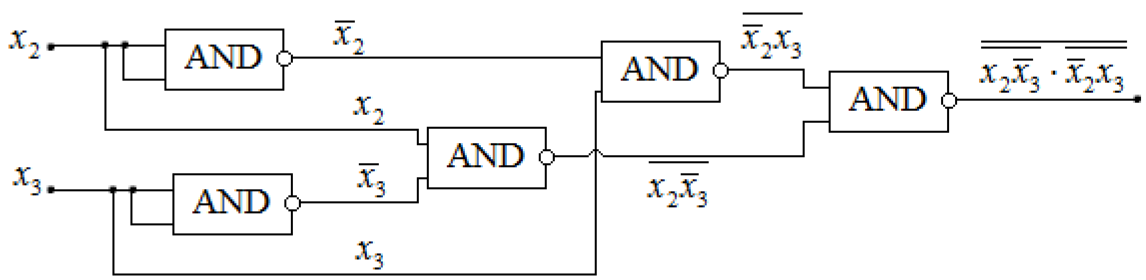


Рис. 1.

Для того, щоб її отримати, спершу треба до виразу (6) застосувати правило де Моргана:

$$y = x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3 = \overline{\overline{x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3}} = \overline{\overline{x_2\bar{x}_3} \cdot \overline{\bar{x}_2 x_3}}\,. \qquad (7)$$

Підтвердження правильності реалізації на рис. 1 отримаємо, зібравши відповідну схему у Multisim, та перебравши всі 4 випадки, див. рис. 2. Елементи 2І–НЕ (NAND2) беремо з вкладки «Place Misc Digital» → «TIL».

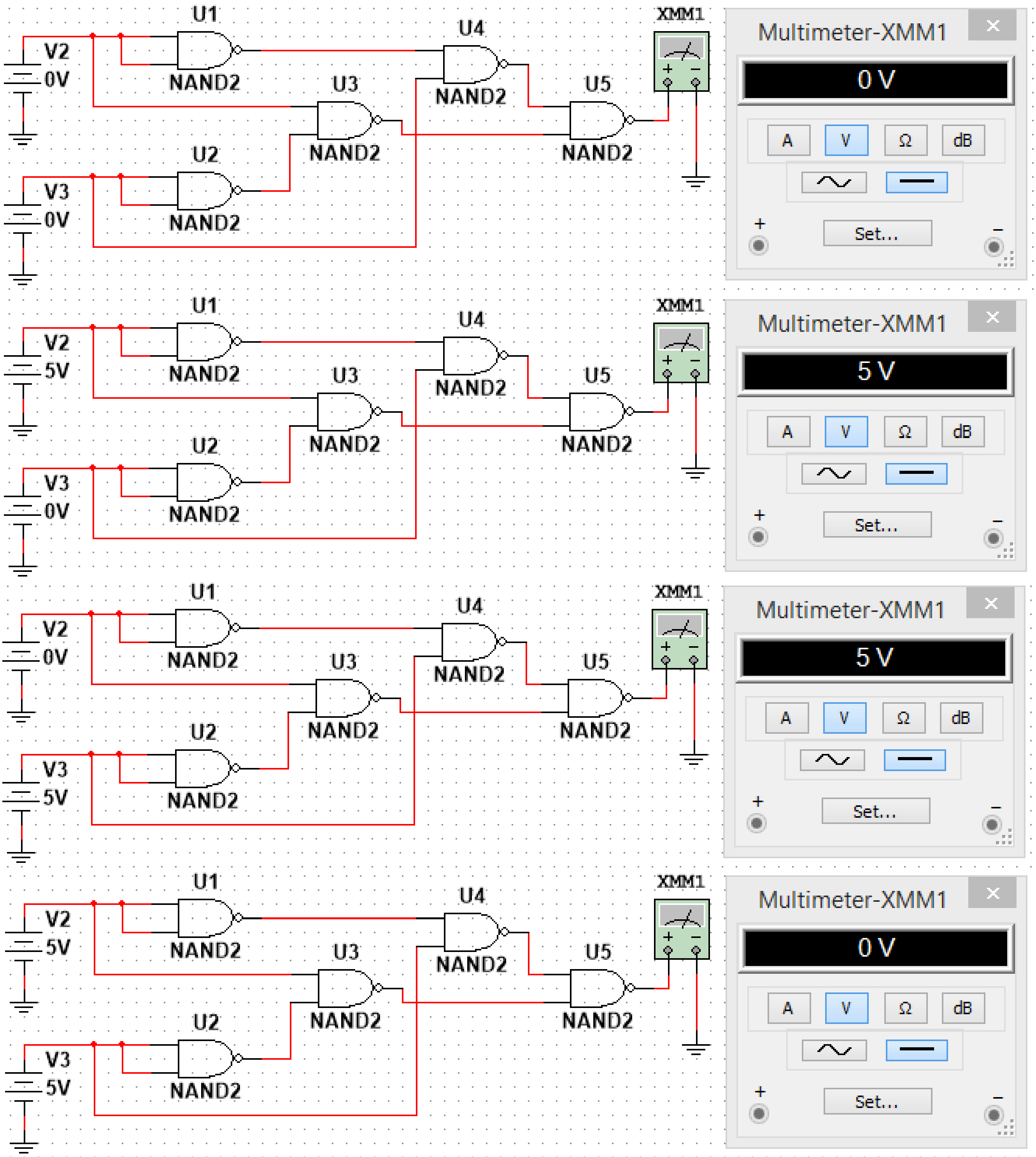


Рис. 2.

Логічна «1» відповідає у Multisim напрузі, що дорівнює 5В, а логічний «0» – напрузі 0В. Як бачимо з рис. 2, таблиця істинності повністю відтворюється.

Для підтвердження правильності отриманих результатів напишемо програму, яка реалізовує функцію (2). Наприклад, у Wolfram Mathematica код та результати роботи програми наведені на рис. 3.

```
For[x1 = 0, x1 ≤ 1, x1++,
 For[x2 = 0, x2 ≤ 1, x2++,
  For[x3 = 0, x3 ≤ 1, x3++,
   For[x4 = 0, x4 ≤ 1, x4++,
    X1 = If[x1 == 0, False, True];
    X2 = If[x2 == 0, False, True];
    X3 = If[x3 == 0, False, True];
    X4 = If[x4 == 0, False, True];
    Y = ((! X1) && X2 && (! X3) && (! X4)) || (X1 && X2 && (! X3) && (! X4)) || ((! X1) && X2 && (! X3) && X4) || (X1 && X2 && (! X3) && X4) || ((! X1) && (! X2) && X3 && X4) ||
      ((! X1) && (! X2) && X3 && (! X4)) || (X1 && (! X2) && X3 && X4) || (X1 && (! X2) && X3 && (! X4));
    y = If[Y == False, 0, 1];
    Print["X1=", x1, " X2=", x2, " X3=", x3, " X4=", x4, "    Y=", y];
   ];
  ];
 ];
];
```

```
X1=0 X2=0 X3=0 X4=0    Y=0
X1=0 X2=0 X3=0 X4=1    Y=0
X1=0 X2=0 X3=1 X4=0    Y=1
X1=0 X2=0 X3=1 X4=1    Y=1
X1=0 X2=1 X3=0 X4=0    Y=1
X1=0 X2=1 X3=0 X4=1    Y=1
X1=0 X2=1 X3=1 X4=0    Y=0
X1=0 X2=1 X3=1 X4=1    Y=0
X1=1 X2=0 X3=0 X4=0    Y=0
X1=1 X2=0 X3=0 X4=1    Y=0
X1=1 X2=0 X3=1 X4=0    Y=1
X1=1 X2=0 X3=1 X4=1    Y=1
X1=1 X2=1 X3=0 X4=0    Y=1
X1=1 X2=1 X3=0 X4=1    Y=1
X1=1 X2=1 X3=1 X4=0    Y=0
X1=1 X2=1 X3=1 X4=1    Y=0
```

Рис. 3

Як бачимо з результатів роботи програми, дійсно при однакових $x_2$ та $x_3$ $y=0$, а при різних $x_2$ та $x_3$ $y=1$, і $y$ не залежить від $x_1$ та $x_4$, що підтверджує отримані результати.

**Примітка 1.** Програму можна писати у будь-якому зручному для вас математичному пакеті чи мові програмування.

**Примітка 2.** Отримана функція $y = x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3$, що дорівнює 0 при однакових $x_2$ та $x_3$ і дорівнює 1 при різних $x_2$ та $x_3$ є відомою логічною операцією XOR. Вище наведена її схемотехнічна реалізація на п'яти елементах 2І–НЕ, яка будується на основі (7). Але, як відомо, можна запропонувати реалізацію операції XOR лише на чотирьох елементах 2І–НЕ, див. рис. 4.

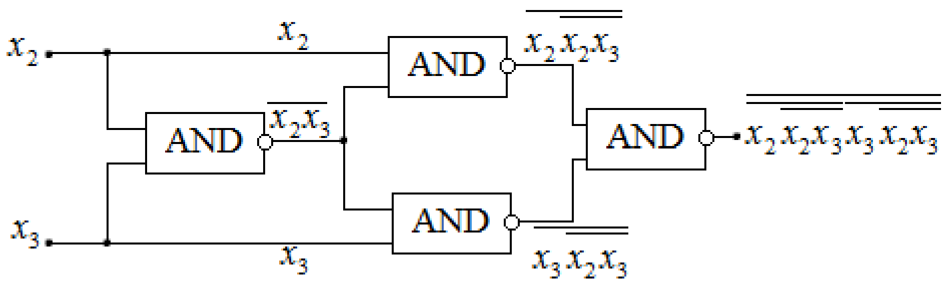


Рис. 4.

Дійсно, згідно правил де Моргана

$$x_2\overline{x_2x_3} = x_2\left(\bar{x}_2 + \bar{x}_3\right) = x_2\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_3 = 0 + x_2\bar{x}_3 = x_2\bar{x}_3,$$
$$x_3\overline{x_2x_3} = x_3\left(\bar{x}_2 + \bar{x}_3\right) = x_3\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = x_3\bar{x}_2 + 0 = x_3\bar{x}_2, \qquad (8)$$

тож

$$\overline{x_2\overline{x_2x_3}} = \overline{x_2\bar{x}_3} = \bar{x}_2 + \bar{\bar{x}}_3 = \bar{x}_2 + x_3,\; \overline{x_3\overline{x_2x_3}} = \overline{x_3\bar{x}_2} = \bar{x}_3 + \bar{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3 + x_2,$$
$$\overline{x_2\overline{x_2x_3}}\,\overline{x_2\overline{x_2x_3}} = \left(\bar{x}_2 + x_3\right)\left(\bar{x}_3 + x_2\right) = \qquad (9)$$
$$= \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_2 + x_3\bar{x}_3 + x_3x_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 + 0 + 0 + x_3x_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_3x_2,$$

та

$$\overline{\overline{x_2\overline{x_2x_3}}\,\overline{x_2\overline{x_2x_3}}} = \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_3x_2} = \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}\cdot\overline{x_3x_2} = \left(\bar{\bar{x}}_2 + \bar{\bar{x}}_3\right)\cdot\left(\bar{x}_2 + \bar{x}_3\right) =$$
$$= \left(x_2 + x_3\right)\cdot\left(\bar{x}_2 + \bar{x}_3\right) = x_2\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = 0 + x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2 + 0 = x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2, \qquad (10)$$

що і треба було довести.